コンパクトな算術商上のヘッケ固有値の漸近分布 (表現論と代数、解析、幾何をめぐる諸問題)

若槻, 聡

数理解析研究所講究録 第2103巻 2019年 109-117

コンパクトな算術商上のヘッケ固有値の漸近分布

金沢大学 数物科学系　若槻 聡
Satoshi Wakatsuki
Faculty of Mathematics and Physics, Kanazawa University

Abstract

この原稿では，保型形式のヘッケ固有値の漸近分布に関する既知の研究について概説した後，Ramacher 氏との共同研究であるコンパクトな算術商上のヘッケ・マース形式のヘッケ固有値の漸近分布に関する研究成果について紹介する．

1　一変数正則保型形式の場合

最も基本的な一変数正則保型形式の場合から解説を始める．特に，正則カスプ形式のヘッケ固有値の漸近分布と $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Q}_p)$ 上の球プランシュレル測度とが関係付けられる．ただし，$\mathbb{Q}_p$ は p 進体とする．

まず自然数 N を一つ固定しよう．自然数 n について，整数成分の 2×2 行列の全体 $M(2,\mathbb{Z})$ の離散的な部分集合 T_n を

$$T_n := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{Z}) \mid ad-bc=n,\ \ c\equiv 0 \mod N \right\}$$

と定める．このとき，$\Gamma := T_1$ $(n=1)$ と置くと，Γ は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の離散群となる．通常，このような Γ を $\Gamma_0(N)$ と記述する．群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ と上半平面 $\mathfrak{H} := \{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z)>0\}$ に対して，

$$g\cdot z := (az+b)(cz+d)^{-1}, \quad j(g,z) := cz+d, \quad g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),\ \ z\in\mathfrak{H}$$

と群の作用と保型因子の記号を定める．

次に自然数 k を一つとる．$\mathfrak{H}$ 上の正則関数 f で，保型性

$$f(\gamma\cdot z) = j(\gamma,z)^k f(z), \quad \forall\gamma\in\Gamma,\ \ \forall z\in\mathfrak{H}$$

を満たし，有界性

$$\sup_{z\in\mathfrak{H}} |\mathrm{Im}(z)^{k/2} f(z)| < +\infty$$

も満たすもの全体から成る空間を $S_k(N)$ と記述する．$S_k(N)$ に属する関数をレベル N，重さ k の正則カスプ形式と呼ぶ．そして，$S_k(N)$ 上にヘッケ作用素 T_n が次のように線型に作

用する．(集合 T_n と作用素 T_n を同一視する．)

$$(T_n f)(z) := n^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\alpha \in \Gamma \backslash T_n} j(\alpha, z)^{-k} f(\alpha \cdot z) \qquad (f \in S_k(N)).$$

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $S_k(N)$ は有限次元であり，$S_k(N)$ 上には Patterson 内積が自然に定義される（定義については [17] などを参照されたい）．そして，N と互いに素な任意の自然数 n について，T_n は自己共役であり，かつ同時対角化可能であることが知られている．したがって，ヘッケ作用素 T_n $((n, N) = 1)$ の固有関数から成る $S_k(N)$ の正規直交基底 $F_{k,N}$ が存在する．以下，ヘッケ作用素の同時固有関数のことをヘッケ固有関数と呼ぶ．また，$F_{k,N}$ のようにパラメータを持つヘッケ固有関数の集合のことを保型形式の族と呼ぶ．

ヘッケ固有関数 $f \in F_{k,N}$ とヘッケ作用素 T_n に対して値 $\lambda_f(n)$ を

$$T_n f = n^{\frac{k-1}{2}} \lambda_f(n) f$$

によって定める．つまり，$n^{\frac{k-1}{2}} \lambda_f(n)$ は T_n の f に関する固有値である．自己共役性から $\lambda_f(n)$ $((n, N) = 1)$ は実数であり，Deligne の上界（Ramanujan 予想）から素数 p について $|\lambda_f(p)| \leq 2$ となることが知られている．数論の習慣に基づき，以下，p は素数を意味する．次の定理が Serre [23] と Conrey, Duke, Farmer [3]（$N = 1$ のときのみ）により同時期にそれぞれ独立して証明された．

定理 1.1　固定した素数 p $((p, N) = 1)$ に対して，

$$\lim_{k+N \to \infty} \frac{1}{|F_{k,N}|} \sum_{f \in F_{k,N}} \delta_{\lambda_f(p)} = \int_{-2}^{2} \mathrm{d}\mu_p^{\mathrm{Pl}} \tag{1.1}$$

が成り立つ．ただし，$\delta_{\lambda_f(p)}$ はディラック測度であり，$\mathrm{d}\mu_p^{\mathrm{Pl}}$ は $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{Q}_p)$ 上の球プランシュレル測度を意味し，具体的には

$$\mathrm{d}\mu_p^{\mathrm{Pl}} = \frac{p+1}{p+p^{-1}+2-x^2} \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, \mathrm{d}x$$

と与えられる（$\mathrm{d}x$ は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度）．

極限公式 (1.1) の意味としては，$[-2, 2]$ 上の任意の連続関数 φ について

$$\lim_{k+N \to \infty} \frac{1}{|F_{k,N}|} \sum_{f \in F_{k,N}} \varphi(\lambda_f(p)) = \int_{-2}^{2} \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu_p^{\mathrm{Pl}}$$

が成立すると書き直すことができる．定理 1.1 はプランシュレル密度定理と呼ばれている．

以下，定理 1.1 に関するいくつかの注意について述べていく．まず [23] において主張されていることで（ここで詳しくは説明しないが），数論への重要な応用としてヘッ

ケ体の次数の非有界性が定理 1.1 より従うことが知られている．次に，Sato-Tate 測度 $\mathrm{d}\mu^{\mathrm{ST}} := \frac{1}{\pi}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x$ は，楕円曲線の有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の点の数に関する分布の予想（Sato-Tate 予想）に現れる（Taylor たちの一連の研究によりほぼ証明された）．モジュラリティ定理（志村谷山予想）を用いて保型形式の言葉に翻訳すると，一つのヘッケ固有関数 f を固定して素数 p を動かしたとき，(1.1) において $\mathrm{d}\mu_p^{\mathrm{Pl}}$ を $\mathrm{d}\mu^{\mathrm{ST}}$ で置き換えたような公式が成立することをその結果は意味している．つまり，(1.1) は Sato-Tate 予想の類似であり，極限の向きが異なるものとなっている．また明らかに測度 $\mathrm{d}\mu_p^{\mathrm{Pl}}$ は p の極限に関して $\mathrm{d}\mu^{\mathrm{ST}}$ に弱収束する．[3] において重さと同時に p も動かす公式が次のように与えられている．十分に大きい l に対して $p_j^l/k_j \to 0$ となるような列 $\{(k_j,p_j)\}_{j\geq 1}$ について

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{|F_{k_j,N}|}\sum_{f\in F_{k_j,N}}\delta_{\lambda_f(p_j)} = \int_{-2}^{2}\mathrm{d}\mu^{\mathrm{ST}} \tag{1.2}$$

が成立する．彼らは $N=1$ の場合のみを考慮していたが，N は任意で固定さえすれば問題無い．Sato-Tate 等分布定理と呼ばれている．

プランシュレル密度定理 (1.1) や Sato-Tate 等分布定理 (1.2) を証明するためには，跡公式を用いることが一般的である．跡公式より次のようなヘッケ固有値の漸近分布の公式が従う．固定した n について

$$\mathrm{Tr}(T_n|_{S_k(N)}) = n^{\frac{k}{2}-1}(k-1)\psi_n(N) + O(N^{\frac{1}{2}}d(N)) \tag{1.3}$$

が成り立ち，そして，固定した N に対して十分大きい l が存在して

$$\mathrm{Tr}(T_n|_{S_k(N)}) = n^{\frac{k}{2}-1}(k-1)\psi_n(N) + O(n^l) \tag{1.4}$$

が成り立つ．ただし，$d(n) := |\{m\in\mathbb{N} \mid m|N\}|$（約数関数）とし，

$$n\text{ が平方のとき}\qquad \psi_n(N) := \frac{1}{12}N\prod_{q|N,\ q\text{ は素数}}(1+q^{-1}),$$

n が非平方のとき $\psi_n(N) := 0$ と定める．(1.1) は (1.3) より，(1.2) は (1.4) より導かれる．ヘッケ固有値の評価の公式を解析数論へ応用する際には，(1.4) のようにヘッケ固有値のパラメータ n に対する変化が分かり，かつ剰余項の評価が含まれていることが重要である．例えば (1.4) のような公式は L 関数の低い位置にある零点の統計的な研究に応用される（low lying zeros） cf. [10].

2　他の保型形式の族に関する研究について

我々の成果を説明する前に，先行研究について紹介したい．セクション 1 で述べたようなヘッケ固有値の漸近分布の研究は，既に様々な場合に研究されている．

H を $\mathbb{Q}$ 上の連結な半単純線型代数群としよう．そうすると，その実点全体 $G := H(\mathbb{R})$ は半単純実リー群となる．そして，数論的合同部分群 Γ が $H(\mathbb{Q})$ の部分群として適当に得られる．以下，保型形式といえば L^2-保型形式，つまり，$L^2(\Gamma\backslash G)$ の離散スペクトル $L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G)$ に属するものを意味する．$L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G)$ 上の G の右正則表現は可算なヒルベルト直交直和として G の既約ユニタリ表現に分解する．属する既約ユニタリ表現に従って保型形式の種類を分類することができる．例えば，正則保型形式は正則離散系列表現の極小 K-type に属する保型形式であると言うことができる．

ヘッケ固有値の漸近分布の研究で，最初に一般的な定式化に成功したのが，Shin と Templier の一連の研究 [24, 25, 26] になる．（G がコンパクトな場合は [22] を参照されたい．）彼らは，離散系列表現に属する保型形式全体の族（パラメータは無限遠指標）に対して，ヘッケ固有値の漸近分布の公式を得ている．正則離散系列表現（多変数正則保型形式）の族に対しては，Kim 氏と山内氏と著者による GSp(4) の場合に関するより精密な研究 [11] がある．

ラプラス作用素の固有関数となっている保型形式のことをマース形式と呼ぶ．さらにヘッケ作用素の固有関数となっているとき，ヘッケ・マース形式と呼ぶ．パラメータをラプラス固有値としたときのマース形式のヘッケ固有値の分布の研究は，Sarnak によって始められた, cf. [21]．ラプラス固有値の方向でのマース形式のヘッケ固有値の漸近分布の公式は，ラプラス作用素の固有関数の数の挙動（ワイルの法則）の研究の一般化と言える．マース形式のワイルの法則の研究では熱核を用いた [13] や [18] の一般的な結果があるが，熱核を用いた場合だと剰余項の評価は現在のところ不可能なようである．剰余項の評価付きのワイルの法則に関しては，G の球主系列表現に属するような保型形式の族に対して行われている, cf. [5, 12]．$\mathrm{GL}(n)$ の球主系列表現に属するような保型形式の族（パラメータはラプラス固有値）に関しては，Matz と Templier によりヘッケ固有値の漸近分布の公式が剰余項の評価付きで得られている, cf. [14, 15]．パラメータを主合同部分群のレベルとした場合については [7] を参照されたい（剰余項評価は出来ていない）．

球主系列表現に属さない保型形式の族（パラメータはラプラス固有値）に関するヘッケ固有値の漸近分布を研究することが我々の目的である．つまり，K を G の極大コンパクト群としたとき，K の非自明な既約表現に属するような保型形式の族を扱う．何故この場合に剰余項の評価付きの漸近分布の公式が，現時点においては跡公式で得ることができないのか説明したい．雑に言うならば跡公式とはスペクトルサイドと幾何サイドを結ぶ等式である．コンパクトサポート台を持つスムースな関数に対する Trace Paley-Wiener 定理は [2] で解決されているので，パラメータに対応するヘッケ・マース形式の空間上に作用するヘッケ作用素の跡の近似値を跡公式のスペクトルサイドから取り出すことができる．そのため，パラメータに対する幾何サイドの増大度を評価することにより，跡公式からヘッケ固有値の漸近分布を導くことができる．幾何サイドは重み付き軌道積分で展開されるので，それらの評価

が主な問題となる．重み付き軌道積分のフーリエ変換は一般的には得られていないため，球フーリエ逆変換をテスト関数に適用することでパラメータに対するテスト関数の増大度を知る必要がある．そのため，[6], [16], [1], [15] などで研究されている基本球関数の上界の評価が必須となる．しかしながら，非自明な K-type 付きの球フーリエ逆変換の公式は一般的には確立していない．この部分が難点となり跡公式による研究が滞っている．

そこで我々は跡公式では無く，Hörmander [9], Duistermaat-Guillemin [4], Ramacher [20] らによるフーリエ積分作用素によるワイルの法則の証明手法を用いることで，K-type 付きの保型形式の族のヘッケ固有値の漸近分布の研究を行った．我々の対象はココンパクトな算術商であるため，跡公式を用いても証明できる可能性があることに注意しておく．というのも，ココンパクトな算術商に関しては Γ のすべての元は単純であるため軌道積分のフーリエ変換が原理的には得られるためである．Herb [8] によって正則単純元の軌道積分のフーリエ変換が得られているため， 特異単純元の軌道積分のフーリエ変換が Harish-Chandra の極限公式から計算できることが分かっている．しかしながら，$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の場合の Patterson [19, (22)] の K-type 付きの跡公式を見れば分かるように，K-type のデータが既約ユニタリ表現やフーリエ変換にどのように関係するのか良く理解する必要があり，本当に跡公式で一般的に証明できるかは良く分からない．

3　我々の研究成果について

セクション 2 と同じように，H を $\mathbb{Q}$ 上の連結な半単純線型代数群とし，K は $G := H(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群としよう．さらに，$G_p := H(\mathbb{Q}_p)$ と置く．$\mathbb{A}$ は $\mathbb{Q}$ のアデール環，$\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ は $\mathbb{Q}$ の有限アデール環とする．つまり，$\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$, $\mathbb{A}_{\mathrm{fin}} = \prod_p^{\mathrm{rest}} \mathbb{Q}_p$ となっている．K_p を G_p の開コンパクトな部分群とし，$K_0 := \prod_p K_p$ が $H(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ の開コンパクトな部分群となっているとする．類数の有限性から $H(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ の元 $x_1, \ldots, x_h$ が存在して，

$$H(\mathbb{A}) = \bigsqcup_{j=1}^{h} H(\mathbb{Q}) x_j G K_0$$

が成立する．数論的合同部分群 Γ_j が $\Gamma_j = H(\mathbb{Q}) \cap x_j K_0 x_j^{-1}$ により定められ，

$$M := H(\mathbb{Q}) \backslash H(\mathbb{A}) / K_0 = \bigsqcup_{j=1}^{h} \Gamma_j \backslash G\, x_j \cong \bigsqcup_{j=1}^{h} \Gamma_j \backslash G \tag{3.1}$$

となる．

仮定 3.1　$H(\mathbb{Q}) \backslash H(\mathbb{A})$ はコンパクトとする．

よく知られているようにキリング形式から G 上にリーマン計量が入る．そのため，仮定

3.1 と同相 (3.1) によって M は閉リーマン多様体となる．我々の方法では，この観点が重要である．

適切な素数の有限集合 S_0 を一つとると，任意の $p \notin S_0$ に関して，$G_p = H(\mathbb{Q}_p)$ は不分岐であり，x_j の p-成分は 1 として良く，K_p は G_p の hyperspecial compact 部分群になる．$L^2(M)$ 上の K の右正則表現を考えると，Peter-Weyl の定理からヒルベルト直和分解

$$L^2(M) = \bigoplus_{\sigma \in \widehat{K}} L^2_\sigma(M)$$

を得る．ただし，$L^2_\sigma(M)$ は $L^2(M)$ における σ-isotypic component とする．**以下，$\sigma \in \widehat{K}$ を固定する．**素数 $p \notin S_0$ について，$h_p \in C_c^\infty(K_p \backslash G_p / K_p)$ による $L^2(M)$ 上のヘッケ作用素が次のように定義できる．

$$(h_p \cdot \phi) := \int_{G_p} h_p(g)\phi(xg)\, \mathrm{d}g, \qquad \phi \in L^2(M).$$

ただし，$\mathrm{d}g$ は G_p 上のハール測度とし，$\mathrm{vol}(K_p) = 1$ と正規化している．この定義はセクション 1 でのヘッケ作用素の定義と両立するものであることに注意する．Δ を M 上のラプラス作用素とすると，Δ と h_p は可換であり，保型表現の観点から $L^2_\sigma(M)$ 上に Δ と h_p $(p \notin S_0)$ の固有関数からなる正規直交基底 $\{\phi_j\}$ が存在することが分かる．ただし，各 ϕ_j に対して，固有値の記号を

$$\Delta\phi_j = \lambda_j \phi, \qquad h_p\phi_j = \lambda_j(h_p)\phi_j$$

と定め，$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ としてよい．この正規直交基底 $\{\phi_j\}$ より，パラメータ $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ に対するヘッケ・マース形式の族が

$$\mathcal{F}_{\sigma,\mu} := \{\phi_j \mid \sqrt{\lambda} \leq \mu\}$$

と定められる．

U を G の部分集合として，$\tilde{K}_U := \cap_{g \in U} g^{-1}Kg$ と置く．また Z は H の中心とする．我々の公式を得るためには次の仮定が必要である．

仮定 3.2　G の 1 における任意の近傍 U について，$\tilde{K}_U = \tilde{K}_G$ が成り立ち，$G(\mathbb{Q}) \cap \tilde{K}_G \subset Z(\mathbb{Q}) \cap K_0$ も成立する．さらに $\sigma|_{Z(\mathbb{Q}) \cap K_0}$ は自明とする．

この仮定は決して強いものではないことに注意したい．例えば $H = \mathrm{SL}(n)$ なら，$\tilde{K}_U$ は中心となるので問題は無い．良く知られた Borel によるココンパクト格子の構成法があるが，その格子に対する特殊直交群の場合などでも仮定 3.2 が成り立つことが示せる．次の定理が我々の主結果となる．

定理 3.3　仮定 3.1 と仮定 3.2 の下で，ある自然数 l とある有理数 δ $(0 < \delta < 1)$ が存在して，任意の $p \notin S_0$ と任意の $h_p \in C_c^\infty(K_p \backslash G_p / K_p)$ について

$$\sum_{\phi_j \in \mathcal{F}_{\sigma,\mu}} \lambda_j(h_p) = \frac{\mathrm{vol}(M)\, d_\sigma\, n_K}{(2\pi)^d\, d}\, h_p(1)\, \mu^d + O(\mu^{d-\delta} \|h_p\|_{L^1}^l)$$

が成り立つ．ただし，$n_K := |H(\mathbb{Q}) \cap \tilde{K}_G|$, $d := \dim G - \dim K$, $d_\sigma := \dim \sigma$, $\mathrm{vol}(M)$ はある M の測度とする．

この定理からセクション 1 のようなプランシュレル密度定理と Sato-Tate 等分布定理を導くことができる．説明が少々面倒なので詳細の記述は割愛する．これらの一般的な定式化の詳細については [25] を参照されたい．

定理 3.3 の証明においては，フーリエ積分作用素を用いた閉リーマン多様体に対する [20] の研究を基にして，ヘッケ作用素による核関数の和の上界を求めることになる．一番の問題点は，捻じれ元の寄与の評価である．そのために，仮定 3.2 が必要であり，最終的には [5] の軌道積分の一様評価に問題を帰結することで定理 3.3 を証明した．

参考文献

[1] V. Blomer, A. Pohl, The sup-norm problem on the Siegel modular space of rank two, Amer. J. Math. **138** (2016), 999–1027.

[2] L. Clozel, P. Delorme, Le theoreme de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie reductifs II, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **23** (1990), 193–228.

[3] J. B. Conrey, W. Duke, D. W. Farmer, The distribution of the eigenvalues of Hecke operator, Acta Arith. **78** (1997), 405–409.

[4] J. J. Duistermaat, V. W. Guillemin, The spectrum of positive elliptic operat は ors and periodic bicharacteristics, Invent. Math. **29** (1975), 39–79.

[5] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, V. S. Varadarajan, Spectra of compact locally symmetric manifolds of negative curvature, Invent. Math. **52** (1979), 27–93.

[6] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, V. S. Varadarajan, Functions, flows and oscillatory integrals on flag manifolds and conjugacy classes in real semisimple Lie groups, Compositio Math. **49** (1983), 309–398.

[7] T. Finis, E. Lapid, W. Müller, Limit multiplicities for principal congruence subgroups of GL(n) and SL(n), J. Inst. Math. Jussieu **14** (2015), 589–638.

[8] R. A. Herb, Discrete series characters and Fourier inversion on semisimple real Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 241–262.

[9] L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators, vol. IV, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.

[10] H. Iwaniec, W. Luo, P. Sarnak, Low lying zeros of families of L-functions, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **91** (2000), 55âĂŞ131.

[11] H. Kim, S. Wakatsuki, T. Yamauchi, An equidistribution theorem for holomorphic Siegel modular forms for GSp_4, to appear in J. Inst. Math. Jussieu.

[12] E. Lapid, W. Müller, Werner Spectral asymptotics for arithmetic quotients of $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$, Duke Math. J. **149** (2009), 117–155.

[13] E. Lindenstrauss, A. Venkatesh, Existence and Weyl's law for spherical cusp forms, Geom. Funct. Anal. **17** (2007), 220–251.

[14] J. Matz, Weyl's law for Hecke operators on $\mathrm{GL}(n)$ over imaginary quadratic number fields, Amer. J. Math. **139** (2017), 57–145.

[15] J. Matz, N. Templier, Sato-Tate equidistribution for families of Hecke-Maass forms on $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$, arXiv:1505.07285, 2015.

[16] S. Marshall, L^p norms of higher rank eigenfunctions and bounds for spherical functions, J. Eur. Math. Soc. **18** (2016), no. 7, 1437–1493.

[17] T. Miyake, Modular forms, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2006.

[18] W. Müller, Weyl's law for the cuspidal spectrum of SL_n, Ann. of Math. (2) **165** (2007), 275–333.

[19] S. J. Patterson, The Laplacian operator on a Riemann surface, Compositio Math. **31** (1975), 83–107.

[20] P. Ramacher, The equivariant spectral function of an invariant elliptic operator. L^p-bounds, caustics, and concentration of eigenfunctions, to be published in J. Math. Pure Appl.

[21] P. Sarnak, Statistical properties of eigenvalues of the Hecke operators, Analytic number theory and Diophantine problems (Stillwater, OK, 1984), 321-331, Progr. Math., 70, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987.

[22] F. Sauvageot, Principe de densité pour les groupes réductifs à Solène, pour son premier sourire, Comp. Math. **108** (1997), 151–184.

[23] J.-P. Serre, Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p, J. Amer. Math. Soc. 10 (1997), no. 1, 75–102.

[24] S.W. Shin, Automorphic Plancherel density theorem, Israel J. Math. **192** (2012), no. 1, 83–120.

[25] S.W. Shin, N. Templier, Sato-Tate theorem for families and low-lying zeros of

automorphic L-functions, Inv. Math., **203** (2016), no. 1, 1–177.

[26] S.W. Shin, N. Templier, On fields of rationality for automorphic representations, Comp. Math. **150** (2014), no. 12, 2003–2053.